ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Καθηγητης Χ. Γ. Φιλος - Επικ. Καθηγητης Ι. Κ. Πουρναρας

Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

Εξετάσεις Ιανουαρίου - Φεβρουαρίου 2014

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ :

Α.Μ.:

1. i) Να βρεθεί η λύση z της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$xyz_x - y^2 z_y - xz = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0,$$

η οποία πληροί την συνθήκη

$$z(x,1) = x^2.$$

ii) Για μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης: α) Να δοθεί ο ορισμός του κανονικού ανώμαλου σημείου και β) Να διατυπωθεί το θεώρημα το σχετικό με την εύρεση δυναμοσειρών λύσεων γύρω από ένα κανονικό ανώμαλο σημείο.

2. i) Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^2 + 4ye^x + 2(y + e^x)y' = 0,$$

και να εξετασθεί αν υπάρχουν λύσεις y της διαφορικής εξίσωσης με $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = b > 0$.

ii) Να δοθεί ο ορισμός της ορίζουσας Wronski και να διατυπωθεί (*λεπτομερώς*) το θεώρημα το σχετικό με τον τύπο του Liouville.

3. i) Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$y'(t) = y(t)[a - by(t)], \quad t \geq 0. \qquad (E)$$

όπου a και b είναι θετικές πραγματικές σταθερές. Να αποδειχθεί ότι για κάθε λύση y της (E) με $0 < y(0) < a/b$, ισχύει ότι $y(t) \geq 0, t > 0$ και $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \frac{a}{b}$.

ii) Να δοθεί ο ορισμός του βασικού συνόλου μιας ομογενούς γραμμικής εξίσωσης n-τάξης (E_0) και να αποδειχθεί ότι υπάρχουν βασικά σύνολα της (E_0).

4. Θεωρούμε την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{x}e^x, \quad x > 0 \qquad (E_1)$$

i) Να επιλυθεί η (E_1).

ii) Να εξετασθεί αν υπάρχει λύση με $y(1) = 0$ καθώς και άν υπάρχουν φραγμένες λύσεις της (E_1).

iii) Να υποδειχθεί ένας τρόπος επίλυσης της (E_1) διαφορετικός από αυτόν που χρησιμοποιήθηκε στο ερώτημα i).

5. Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση Hermite

$$y'' - 2xy' + 2py = 0, \tag{H}$$

όπου p είναι μια πραγματική σταθερά.

i) Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (H) γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

ii) Ως μια εφαρμογή, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - 2xy' + 8y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

*) Για $p = 0$, να λυθεί η εξίσωση με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που εφαρμόστηκε στο $i)$ και να συγκριθούν οι λύσεις που προέκυψαν από τους δυο τρόπους. Τι συμπεράσματα προκύπτουν από την σύγκριση·

6. Θεωρούμε το γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y_1' = y_2 + y_3 + x, \;\; y_2' = y_1 + y_3 + 1, \;\; y_3' = y_1 + y_2 - x^2. \tag{S}$$

i) Να επιλυθεί το σύστημα (S).

ii) Να βρεθεί (αν υπάρχει) η λύση του συστήματος (S) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$.

iii) Να εξετασθεί αν υπάρχουν φραγμένες λύσεις του συστήματος.

ΝΑ ΔΟΘΟΥΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ 5 ΘΕΜΑΤΑ

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ